Άσκηση 1.

(1) Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε τυχόν σημείο αυτής, διχοτομεί τη γωνία των εστιακών ακτινών.
(2) Να αποδειχθεί ότι η κάθετη της εφαπτομένης μιας έλλειψης σε τυχόν σημείο αυτής, διχοτομεί τη γωνία των εστιακών ακτινών.
(3) Θεωρούμε μια έλλειψη και μια υπερβολή οι οποίες έχουν τις ίδιες εστίες $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$. Να αποδειχθεί ότι αυτές τέμνονται κάθετα.

Άσκηση 2. Να δοθεί παράδειγμα δύο σφαιρών οι οποίες να μην έχουν κοινά σημεία, δύο σφαιρών που να εφάπτονται και δύο σφαιρών οι οποίες να τέμνονται.

Άσκηση 3.
Θεωρούμε τις παρακάτω σφαίρες:

$$\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 10 = 0$$

και

$$\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 7y + 6z - 10 = 0.$$

(1) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω σφαίρες τέμνονται.
(2) Να προσδιορίσετε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής των σφαιρών Σ_1 και Σ_2.

Άσκηση 4.

(1) Να προσδιορίσετε τη σφαίρα (Σ_1) για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι ομόκεντρη της σφαίρας $x^2+y^2+z^2-2y-4z-125 = 0$ και εφάπτεται του επιπέδου $3x+4y+26 = 0$. Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε τη σφαίρα (Σ_2) για την οποία γνωρίζουμε ότι έχει κέντρο το σημείο $K_2(2, 1, 0)$ και τέμνει το επίπεδο $(\pi) : -x + y - 1 = 0$ κατά κύκλο ακτίνας $\rho = \sqrt{23}$.
(2) Να προσδιορίσετε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής των σφαιρών (Σ_1) και (Σ_2).

Άσκηση 5.

(1) Να σχεδιάσετε το γράφημα της επιφάνειας $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 10$ του επιπέδου $\mathbb{R}^2$.
(2) Να σχεδιάσετε το γράφημα της επιφάνειας $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ του επιπέδου $\mathbb{R}^2$.
(3) Να αναγνωρίσετε το είδος της επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ σε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις:
   α) $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 2z$. Επιπλέον, να προσδιορίσετε το είδος της παραπάνω επιφάνειας όταν $z = 0$.
   β) $-x^2 - y^2 + 2y = 0$.
   γ) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x - 8y = 8$.
   δ) $-x^2 - 3z^2 + 2x + y + 18z = 25$.
   Σε κάθε μία των περιπτώσεων β, γ, δ, να σχεδιάσετε προσεγγιστικά τα γραφήματα των επιφανειών.
(4) Να αναγνωρίσετε το είδος της επιφάνειας του $\mathbb{R}^3$ σε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις:
   α) $8x^2 + z^2 - 2 = 0$.
   β) $-x^2 - 2y^2 - z^2 - 4 = 4z$.

$\gamma)$ $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2x - 4y - 12z - 16 = 0$.
$\delta)$ $-x^2 + 4y^2 - z^2 + 8 = 0$. Επιπλέον, να προσδιοριστεί η τομή της παραπάνω επιφάνειας με το επίπεδο $x = \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R}$.
$\epsilon)$ $-y^2 - 2z^2 + 4y - 4z + x - 8 = 0$. Επιπλέον, να προσδιοριστεί η τομή της παραπάνω επιφάνειας με το επίπεδο $y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Στις περιπτώσεις γ, δ, να σχεδιάσετε προσεγγιστικά τα γραφήματα των επιφανειών.

Άσκηση 6.

$\alpha)$ Να αναγνωρίσετε την επιφάνεια: $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$.
$\beta)$ Να σχεδιαστεί προσεγγιστικά η επιφάνεια: $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz + 3x + 2y = 0$.

Άσκηση 7. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται από τη σχέση

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz,\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

στους κύριους άξονες, τους οποίους και να προσδιορίσετε. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το είδος της επιφάνειας που ορίζεται από τη σχέση $q(x, y, z) = 2$.

Άσκηση 8. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται από τη σχέση

$$q(x, y, z) = 4x^2 - 2xz + 3y^2 + 4z^2,\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

στους κύριους άξονες, τους οποίους και να προσδιορίσετε. Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το είδος της επιφάνειας που δίνεται από τη σχέση:

$$4x^2 - 2xz + 3y^2 + 4z^2 - 2\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}z - 7 = 0.$$

Προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες του κέντρου της παραπάνω επιφάνειας στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $Oxyz$, να τη σχεδιάσετε προσεγγιστικά.

Άσκηση 9. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται από τη σχέση

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2,\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

στους κύριους άξονες, τους οποίους και να προσδιορίσετε.
Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το είδος της επιφάνειας που δίνεται από τη σχέση:

$$2x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - 3y + 2x - 2z + \frac{1}{4} = 0.$$

Προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες του κέντρου της παραπάνω επιφάνειας στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $Oxyz$, να τη σχεδιάσετε προσεγγιστικά.

Άσκηση 10. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται από τη σχέση

$$q(x, y, z) = 14x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2\sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}xz - 14yz,\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

στους κύριους άξονες, τους οποίους και να προσδιορίσετε.
Στη συνέχεια, να προσδιορίσετε το είδος της επιφάνειας που δίνεται από τη σχέση:

$$14x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2\sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}xz - 14yz - 24\sqrt{2}y - 24\sqrt{2}z = 0.$$

Προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες του κέντρου της παραπάνω επιφάνειας στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων $Oxyz$, να τη σχεδιάσετε προσεγγιστικά.